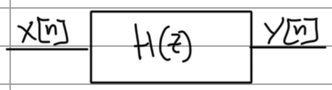
Esercizio Completo

SCOPO Dimostrare che un segnale $x[n]$ di tipo WSS produce all'uscita di un sistema LTI un segnale WSS

TESTO Dato un sistema con funzione di trasferimento $H(z)$ con in ingresso un segnale aleatorio $x[n]$ di tipo WSS produce in uscita un segnale $y[n]$ ancora del tipo WSS?



Processo WSS
- media costante $\mu = E[x[n]]$;
- la potenza dipende solo dalla media $P_x = E[|x[n]|^2]$;
- Autocorrelazione indipendente dalla traslazione $R_{xx}[m]$;

⇒ Se $y[n]$ è di tipo WSS allora ha le proprietà di cui sopra.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$ condizione generale per il calcolo dell'uscita.

MEDIA DI $y[n]$

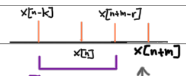
$$E[y[n]] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,E[x[n-k]] = E\Big[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]}_{\text{indip. da } n}\Big]\mu =$$

$$= \mu\, H(F)\Big|_{F=0} \Rightarrow$$ è costante. ✓

AUTOCORRELAZIONE DI $y[n]$

$$R_{yy}[n, n+m] = E[y[n]\,y[n+m]] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]\,x[n+m-r]\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[k]\,h[r]}_{\text{non dipendono da } n \text{ posso estrarli da } E}\, E\big[\underbrace{x[n-k]\,x[n+m-r]}_{x[n+m-r-n+k] = x[m+k-r]}\big] =$$



la posizione dei campioni è solo indicativa

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[r]\,R_{xx}[m+k-r] =$$

trasformo l'indice di R_{xx} in una forma standard $m+k-r = m-(r-k) = m-\ell \Rightarrow r = \ell+k$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell]\,R_{xx}[m-\ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell]}\Big] R_{xx}[m-\ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \underbrace{v(\ell)} R_{xx}[m-\ell]$$

Vediamo com'è fatta $v(\ell) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k+\ell] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\,h[m+\ell]$

posso cambiare l'indice tanto è una var. muta.

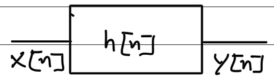
⇒ $R_{yy}[m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[m]\cdot h[m+\ell]\,R_{xx}[m-\ell] = \underbrace{h[m] * h[-m]}_{\text{è una sequenza simmetrica attorno allo } 0} * R_{xx}[m]$ dipende solo da m dunque la tesi è dimostrata.

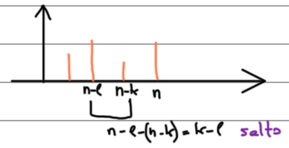
POTENZA DI $y[n]$

$R_{xx}[\ ] = h[m] * h[-m] * R_{xx}[m] \Rightarrow S_{yy}(F) = H(F)\,H^c(F)\,S_{xx}(F) = |H(F)|^2 S_{xx}(F)$

La potenza del segnale in uscita dipende da quella d'ingresso che per definizione dipende solo dalla media

Questions / Note	Scope
	# Esercizio Completo
SCOPO	Mostrare un metodo per il calcolo della potenza d'uscita di un segnale aleatorio reale in ingresso ad un sistema LTI con h[n] reale
TESTO	Sia x[n] un processo aleatorio bianco a media nulla in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva reale. Calcolare la potenza del segnale in uscita sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza.





CALCOLO DI P_y NEL DOMINIO NEL TEMPO

$$R_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m]$$

$$P_y = E\left[(y[n])^2\right] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[\ell]\,x[n-\ell]\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[\ell]\cdot\Big(\underbrace{E\big[x[n-k]\,x[n-\ell]\big]}_{\text{vds grafico sopra } R_{xx}[k-\ell]}\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[\ell]\;\sigma_x^2\,\overbrace{\delta[k-\ell]}^{k=\ell \Rightarrow 1 \quad k\neq\ell \Rightarrow 0} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,h[k]\,\sigma_x^2 = \sigma_x^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h[k]\right|^2$$

CALCOLO DI P_y NEL DOMINIO DI F

$$R_{xx}[m] = \sigma_x^2\,\delta[m] \Rightarrow S_{xx}(F) = \sigma_x^2\cdot 1 = \sigma_x^2 \quad \text{dalla definizione}$$

$$P_y = E\left[y[n]^2\right] = \int_{-0.5}^{0.5} S_{yy}(F)\,dF = \int_{-0.5}^{0.5} S_{xx}(F)\,|H(F)|^2\,dF = \int_{-0.5}^{0.5}\sigma_x^2\,|H(F)|\,dF = \sigma_x^2\int_{-0.5}^{0.5}|H(F)|^2\,dF$$

CONCLUSIONI

$$\sigma_x^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h[k]\right|^2 = \sigma_x^2\int_{-0.5}^{0.5}|H(F)|^2\,dF$$

in cui $H(F)$ è la TDF di $h[k]$ e negli esercizi partendo da questa uguaglianza devo scegliere se per calcolare la potenza del segnale in uscita mi conviene usare la sommatoria (dominio del tempo) oppure l'integrale (dominio della F).

Esercizio Completo

SCOPO devo scegliere se calcolare la potenza nel dominio del tempo o delle frequenze.

TESTO Calcolare la potenza di uscita in un sistema LTI la cui funzione di trasferimento è $H(z) = \frac{z}{z-a}$ e a cui è applicato un segnale aleatorio $x[n]$ bianco a media nulla. Infine sappiamo che il sistema è stabile.

$$x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$$

SVOLGIMENTO

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \qquad \text{RoC} = \{z: |z|>|a|,\ |a|<1\}$$

$$H(z) \longrightarrow h[n] = a^n u[n]$$

$$P_y = \sigma_x^2 \int_{-0.5}^{0.5} |H(F)|^2 dF = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^n u[n]|^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{2n} = \sigma_x^2 \frac{1}{1-a^2}$$

Conclusione Se avessi voluto calcolare la potenza nel dominio delle frequenze avrei dovuto risolvere l'integrale della seguente $H(F)$, praticamente impossibile.

$$H(F) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi F}} = \frac{e^{j2\pi F}}{e^{j2\pi F} - a}$$

Esercizio Completo

SCOPO devo scegliere se calcolare la potenza nel dominio del tempo o delle frequenze.

TESTO Calcolare la potenza in uscita ad un sistema LTI quando in ingresso viene applicato un processo bianco a media nulla. Il sistema è stabile.

$$x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$$

SVOLGIMENTO Abbiamo $H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.24 z^{-2}}$

1° Ricerca dei poli $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.24} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0.96}}{2} = \frac{1 \pm 0.2}{2}$

$$\{z_1, z_2\} = \{0.6,\ 0.4\}$$

2° scomposizione in fratti semplici

$$A_1 = H(z)\frac{(z-0.6)}{z}\Big|_{z=0.6} = \frac{z^2}{(z-0.6)(z-0.4)}\frac{(z-0.6)}{z}\Big|_{z=0.6} = \frac{z}{z-0.4}\Big|_{z=0.6} = \frac{0.6}{0.6-0.4} = 3 \qquad A_2 = -2$$

$$H(z) = -2\frac{z}{z-0.4} + 3\frac{z}{z-0.6} \Rightarrow h[n] = -2(0.4)^n u[n] + 3(0.6)^n u[n]$$

$$\sigma_x^2 \int_{-0.5}^{0.5} |H(F)|^2 dF = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2 = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-2(0.4)^n + 3(0.6)^n\right]^2 u[n] \right\} = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} 4(0.4)^{2n} + 9(0.6)^{2n} - 6(0.4)^n(0.6)^n \right\} =$$

$H(F) = H(z)\big|_{z=e^{j2\pi F}}$ troppo complesso

$$= \sigma_x^2 \left\{ 4\frac{1}{1-(0.4)^2} + 9\frac{1}{1-(0.6)^2} - 12\frac{1}{1-0.24} \right\} = \sigma_x^2 (4.76 + 14.06 - 15.78) = \sigma_x^2\, 3.04$$

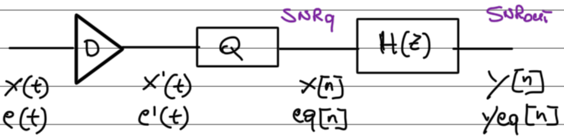
Conclusioni: Anche nel secondo esempio la scelta più semplice ha permesso di calcolare la potenza in uscita

Esercizio Completo

TESTO

Dato un segnale tonale $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ la cui portante ha una frequenza $f_0 = 200\,Hz$ e viene campionato ad 8 bit ad una frequenza di campionamento $f_c = 8\,KHz$ dopodiché applicato ad un sistema LTI. Calcolare l'SNR all'uscita del filtro la cui $H(z) = 0.1 \dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$

$\Rightarrow$

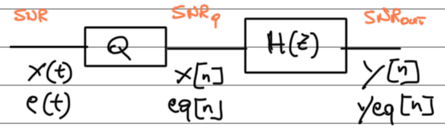


SVOLGIMENTO

La catena completa del sistema è rappresentata dallo schema sopra ove sono indicate anche le grandezze all'uscita di ogni blocco.

$$SNR_{OUT} = \frac{P_y}{P_{y_{eq}}}$$ dalla definizione

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow A_x = 2$ ampiezza del segnale $\Rightarrow$ non c'è bisogno del blocco di guadagno per adattare la dinamica del segnale a quella del quantizzatore



CALCOLO POTENZA x(t)

$$P_x = E[x^2(t)] = \int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(t)\,dt = \int_{-0.5}^{0.5} \overset{*}{\underset{x\quad y'}{\cos(t)\cos(t)}}\,dt \Rightarrow \int_{-0.5}^{0.5} \cos(t)\cos(t)\,dt : \cos(t)\sin(t)\Big|_{t=-0.5}^{0.5} - \int_{-0.5}^{0.5} [-\sin(t)]\sin(t)\,dt$$

$$\int_{-0.5}^{0.5} \cos(t)\cos(t)\,dt - \int_{-0.5}^{0.5} \sin(t)\sin(t) = \cos(t)\sin(t)\Big|_{-0.5}^{0.5} \Rightarrow \int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(t)\,dt - \int_{-0.5}^{0.5} (1-\cos^2(t))\,dt = 0$$

$$2\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(t) - \int_{-0.5}^{0.5} dt = 0 \Rightarrow \int_{-0.5}^{0.5} \cos^2(t) = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} dt = \frac{1}{2}\, t\Big|_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{2}(0.5+0.5) = \frac{1}{2}\ ** \quad \text{H}$$

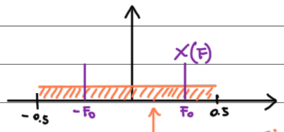
SNR PRIMA DEL FILTRAGGIO

$$SNR_q = 6.02B + 10\log_{10}\frac{12S}{D} = 6.02B + 10\log_{10}\frac{\overset{3}{\cancel{12}} \cdot \frac{1}{2}}{\cancel{2^2}_{\,2}} = 6.02B + 10\left(\log_{10} 3 - \log_{10} 2\right) = 49.92$$

NB: la formula per il calcolo dell'SNRq poteva essere ottenuta con $SNR_q = 6{,}02B + 1{,}76$ in quanto segnale e quantizzatore hanno la stessa dinamica $[-1,1]$

SEGNALE x[n] e RUMORE

E' il segnale in uscita dal quantizzatore del tipo $x[n] = \cos(2\pi F_0 n)$ in cui F_0 è la frequenza normalizzata che appartiene all'intervallo $[-0.5, 0.5]$ e vale $F_0 = \frac{200}{8000} = \frac{1}{40}$ per cui $x[n] = \cos(2\pi\, 0.025 n)$

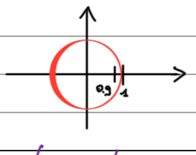


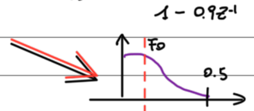
Spettro del segnale e del rumore all'ingresso del filtro.

si tratta di un segnale di tipo WSS dunque la sua potenza è costante e corrisponde alla sua varianza σ_{eq} che per un segnale avente dinamica compresa tra $[-1,1]$ vale $\sigma_{eq} = \frac{2^{-2B}}{3}$ ***

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$H(z) = 0.1\,\frac{1}{1-0.9z^{-1}} = 0.1\,\frac{z}{z-0.9} \Rightarrow z = 0.9$$ il polo è molto vicino ad 1 dunque se ne può concludere che si tratta di un filtro passa-basso. c'è uno zero in $z=0$ ma non influisce.





* Int. per parti: $d(xy) = x'y + xy' \Rightarrow \int d(xy) = \int x'y + \int xy' \Rightarrow \int xy' = xy - \int x'y$

** la potenza di un segnale deterministico la si può anche calcolare come $\frac{A^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$ (con A = valore assoluto picco-picco)

*** Essendo l'errore un processo aleatorio di tipo W

Potenza di $y[n]$

Avendo in ingresso un segnale tonale dalla teoria sappiamo che in uscita un segnale sinusoidale la cui potenza vale $P_y = \frac{A^2}{2}$ in cui A rappresenta l'ampiezza.

Ampiezza di $y[n]$

$$y[n] = \underbrace{|H(F_0)| \cdot A}_{\text{ampiezza di } y[n]} \cdot \cos(2\pi F_0 n + \angle H(F_0)) \Rightarrow A = 1$$

è l'ampiezza del segnale in ingresso

$$H(F_0) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi F_0}} = 0.1 \frac{e^{j2\pi F_0}}{e^{j2\pi F_0} - 0.9} = 0.558$$

$$P_y = \frac{|H(F_0)|^2 \cdot A^2}{2} = \frac{(0.558)^2}{2} = 0.155$$

Potenza dell'errore

$y_{eq}[n]$ è una sequenza temporale di tipo WSS la cui potenza è definita come: $P = R_{xx}[0] = \sum |x[n]|^2$ che nel nostro caso vale:

$$P_{y_{eq}} = \sigma_{eq}^2 \sum |h[n]|^2$$

è la varianza dell'errore all'ingresso del filtro che per un quantizzato re con dinamica $[-1,1]$ $\frac{2^{-2B}}{3}$

$$h[n] = H(z)^{-1} = \left[0.1 \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}\right]^{-1} = (0.1)(0.9)^n u[n]$$

$$P_{y_{eq}} = \frac{2^{-2B}}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(0.1)(0.9)^n u[n]\right]^2 = \frac{2^{-2B}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (0.1)^2 (0.9)^{2n} = (0.1)^2 \frac{2^{-2B}}{3} \frac{1}{1-(0.9)^2} = 2.67 \cdot 10^{-7}$$

$$SNR_y = \frac{P_y}{P_{y_{eq}}} = \frac{0.155}{2.67 \cdot 10^{-7}} = 58.67 \text{ db}$$

$\Rightarrow$ $SNR_y > SNR_q$ in uscita del filtro il rapporto segnale rumore è migliorato

Conclusioni: la scelta dei poli influenza direttamente su P_y in quanto la scelta del polo determina $|H(F_0)|$ e questo significa poter massimizzare il guadagno in prossimità di F_0.

Inoltre σ_{eq}^2 coincide con la potenza di un segnale di tipo WSS in quanto:

la proprietà afferma che $\sigma^2 = C_{xx}[0]$

dalla definizione di potenza

$$\sigma^2 = C_{xx}[0] = R_{xx}[0] - m_x^2 = R_{xx}[0] = \sum x[n]^2$$

$\Rightarrow$ σ^2 coincide con la potenza

la proprietà afferma che $C_{xx}[m] = R_{xx}[m] - m_x^2$

la media è nulla (dato del problema)